Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik

Dokument mit mathematischen Formeln

**LaTex**

IQB – Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KMK – Kultusminister Konferenz

Stand: 05.12.2023

Als Hilfsmittel für die Bearbeitung der Aufgaben des Prüfungsteils B des Pools für das Fach Mathematik ist – neben dem jeweiligen digitalen Hilfsmittel – eine mathematische Formelsammlung vorgesehen, die nur die im vorliegenden Dokument enthaltenen Inhalte hat.[^1](#S1_1a)

Das Dokument stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar; insbesondere werden im Allgemeinen Voraussetzungen für die Gültigkeit von Formeln nicht genannt und im Abschnitt zum Fach Mathematik Bezeichnungen nicht erklärt

[^1](#S1_1): Die Möglichkeit der Verwendung anderer Formeldokumente im Unterricht wird durch das Formeldokument, das für die Bearbeitung der Aufgaben des Prüfungsteils B des Pools vorgesehen ist, nicht berührt.

Inhaltsverzeichnis

[1 Grundlagen 3](#_Toc156818271)

[Ähnlichkeit zweier Dreiecke 3](#_Toc156818272)

[Binomische Formeln 3](#_Toc156818273)

[Maße von Figuren 3](#_Toc156818274)

[Maße von Körpern 5](#_Toc156818275)

[Potenzen und Logarithmen 6](#_Toc156818276)

[Quadratische Gleichung 6](#_Toc156818277)

[Rechtwinkliges Dreieck 7](#_Toc156818278)

[Symbole in Verbindung mit Mengen 8](#_Toc156818279)

[Trigonometrie 9](#_Toc156818280)

[Winkelmaße 9](#_Toc156818281)

[2 Analysis 10](#_Toc156818282)

[Ableitung 10](#_Toc156818283)

[Ableitungen ausgewählter Funktionen 10](#_Toc156818284)

[Ableitungsregeln 10](#_Toc156818285)

[Ableitung von Integralfunktionen 10](#_Toc156818286)

[Bestimmtes Integral 10](#_Toc156818287)

[Grenzwerte 11](#_Toc156818288)

[Rotationskörper 11](#_Toc156818289)

[Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen 11](#_Toc156818290)

[Zueinander senkrechte Geraden 11](#_Toc156818291)

[3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra 12](#_Toc156818292)

[Skalarprodukt 12](#_Toc156818293)

[Ebenen 12](#_Toc156818294)

[4 Stochastik 13](#_Toc156818295)

[Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit 13](#_Toc156818296)

[Binomialkoeffizient 13](#_Toc156818297)

[Zufallsgrößen 13](#_Toc156818298)

[Sigma-Regeln 14](#_Toc156818299)

[Prognoseintervall und Konfidenzintervall 14](#_Toc156818300)

[Signifikanztest 14](#_Toc156818301)

<Anmerkung> Hinweis zu den Fußnoten: Über die Verlinkung kann man direkt zwischen Textbereich und Fußnoten vor- und zurückspringen.</Anmerkung>

# 1 Grundlagen

## Ähnlichkeit zweier Dreiecke

Die folgenden Aussagen zu zwei Dreiecken sind äquivalent:

- Die Dreiecke sind ähnlich.

- Die Größen der Winkel des einen Dreiecks stimmen mit den Größen der Winkel des anderen Dreiecks überein.

- Die Verhältnisse der Seitenlängen des einen Dreiecks stimmen mit den Verhältnissen der Seitenlängen des anderen Dreiecks überein.

## Binomische Formeln

a^2 +2ab +b^2 =(a +b)^2

a^2 -2ab +b^2 =(a -b)^2

a^2 -b^2 =(a +b) \*(a -b)

## Maße von Figuren

#### Dreieck

A =1/2 \*g \*h

#### Parallelogramm[^1](#S2_1a)

A =g \*h

#### Trapez

A =1/2 \*(a +c) \*h

c

h

a

#### Drachenviereck

A =1/2 \*e \*f

e

f

#### Kreis

A =\pi \*r^2

U =2 \pi \*r

## Maße von Körpern

#### Prisma

V =A\_G \*h

#### Pyramide

V =1/3 \*A\_G \*h

#### Zylinder

V =A\_G \*h

für gerade Zylinder:

A\_O =2 \*A\_G +2 \pi \*r \*h

#### Kegel

V =1/3 \*A\_G \*h

für gerade Kegel:

A\_O =A\_G +\pi \*r \*m

(m: Abstand der Spitze vom Rand der Grundfläche)

#### Kugel

V =4/3 \pi \*r^3

A\_O =4 \pi \*r^2

[^1](#S2_1): Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten wird als Raute bezeichnet.

## Potenzen und Logarithmen

a^r \*b^r =(a \*b)^r

a^r \*a^s =a^{r +s}

(a^r)^s =a^{r \*s}

a^{m/n} =sqrt[n]{a^m} =(\sqrt[n]{a})^m

\frac{a^r}{b^r} =(a/b)^r

\frac{a^r}{a^s} =a^{r -s}

a^{-r} =\frac{1}{a^r}

\log\_a (b \*c) =\log\_a b +\log\_a c

\log\_a b/c) =\log\_a b -\log\_a c

\log\_a b^r =r \*\log\_a b

## Quadratische Gleichung

x\_1 =-p/2 -\sqrt{(p/2)^2 -q}

und

x\_2 =-p/2 +\sqrt{(p/2)^2 -q}

sind die Lösungen der Gleichung x^2 +px +q =0.

## Rechtwinkliges Dreieck

- sin \phi =u/w  
cos \phi =v/w  
tan \phi =\frac{sin \phi}{cos \phi} =u/v

W

V

U

u

v

w

\phi

- Satz des Pythagoras  
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt für die Längen u und v der beiden Katheten und die Länge w der Hypotenuse u^2 +v^2 =w^2.  
Wenn für die Längen u, v und w der Seiten eines Dreiecks u^2 +v^2 =w^2 gilt, dann hat dieses Dreieck einen rechten Winkel, der der Seite mit der Länge w gegenüber liegt.

- Satz des Thales  
Wenn ein Dreieck beim Eckpunkt W einen rechten Winkel hat, dann liegt W auf dem Kreis, der den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft.

Wenn der Eckpunkt W eines Dreiecks auf dem Kreis liegt, der den Mittelpunkt der gegen-überliegenden Seite als Mittelpunkt hat und durch die beiden anderen Eckpunkte verläuft, dann hat dieses Dreieck bei W einen rechten Winkel.

## Symbole in Verbindung mit Mengen

\N =\{0,1,2,3,...\}

\R^+ =\{x \in \R | x >0\}

[a;b] =\{x \in \R | a \le x \le b\}

\Z =\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}

\R^+\_0 =\{x \in \R | x \ge 0\}

]a;b[ =\{x \in \R | a <x <b\}

A \cap B =\{x | x \in A \wedge x \in B\}

A \cup B =\{x | x \in A \vee x \in B\}

A \setminus B =\{x | x \in A \wedge x \notin B\}

## Trigonometrie

sin (-\phi) =-sin \phi

sin (\phi -90°) =-cos \phi

(sin \phi)^2 +(cos \phi)^2 =1

cos (-\phi) =cos \phi

cos (\phi -90°) =sin \phi

## Winkelmaße

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360°,   
so beträgt sie im Bogenmaß 2 \pi.

# 2 Analysis

## Ableitung

f'(x\_0) =\lim\_{x \to x\_0} \frac{f(x) -f(x\_0)}{x -x\_0} =\lim\_{h \to 0}   
\frac{f(x\_0 +h) -f(x\_0)}{h}

## Ableitungen ausgewählter Funktionen

|  |  |
| --- | --- |
| Term der Funktion | Term der Ableitungsfunktion |
| x^r | r \*x^{r -1} |
| sin x | cos x |
| cos x | -sin x |
| e^x | e^x |
| ln x | 1/x |
| -x +x \*ln x | ln x |

## Ableitungsregeln

|  |  |
| --- | --- |
| Term der Funktion | Term der Ableitungsfunktion |
| k \*u(x) | k \*u'(x) |
| u(x) +v(x) | u'(x) +v'(x) |
| u(x) \*v(x) | u'(x) \*v(x) +u(x) \*v'(x) |
| u(v(x)) | u'(v(x)) \*v'(x) |

## Ableitung von Integralfunktionen

Für I(x) =\int \limits\_a^x f(t) dt gilt I'(x) =f(x).

## Bestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt

\int \limits\_a^b f(x) dx =[F(x)]\_a^b =F(b) -F(a).

## Grenzwerte

Ist p(x) ein Polynom, so gilt \lim\_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} =0.

Ist p(x) ein nicht konstantes Polynom, so gilt \lim\_{x \to +\infty} \frac{ln x}{p(x)} =0.

Ist p(x) ein Polynom ohne konstanten Summanden,   
so gilt \lim\_{x \to +0} (p(x) \*ln x) =0.

## Rotationskörper

V =\pi \*\int \limits\_a^b (f(x))^2 dx

## Schneiden und Berühren zweier Funktionsgraphen

Die Graphen zweier Funktionen f und g schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben.

Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich in einem Punkt genau dann, wenn sie diesen Punkt gemeinsam und dort die gleiche Steigung haben.

## Zueinander senkrechte Geraden

Zwei Geraden mit den Steigungen m\_1 und m\_2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn m\_1 \*m\_2 =-1 gilt.

# 3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

## Skalarprodukt

\vec{a} \circ \vec{b} =a\_1b\_1 +a\_2b\_2 +a\_3b\_3

\vec{a} \circ \vec{b} =|\vec{a}| \*|\vec{b}| \*cos \phi

\vec{a} \circ \vec{a} =|\vec{a}|^2

## Ebenen

- Parameterform:  
\vec{x} =\vec{a} +\lambda \*\vec{u} +\mu \*\vec{v}

- Koordinatenform:  
n\_1x\_1 +n\_2x\_2 +n\_3x\_3 +k =0

- Normalenform:  
\vec{n} \circ (\vec{x} -\vec{a}) =0

# 4 Stochastik

## Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

P\_A(B) =\frac{P(A \cap B)}{P(A)}

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:

- A und B sind stochastisch unabhängig.

- P\_B(A) =P(A)

- P\_A(B) =P(B)

## Binomialkoeffizient

{n \choose k} =\frac{n!}{k! \*(n -k)!}

## Zufallsgrößen

- Für eine Zufallsgröße X mit den Werten x\_1, x\_2, ..., x\_n gilt:

- Erwartungswert:  
E(X) =\sum \limits\_{i =1}^n x\_i \*P(X =x\_i)

- Varianz:  
Var(X) =\sum \limits\_{i =1}^n (x\_i -E(X))^2 \*P(X =x\_i)

- Standardabweichung:  
\sqrt{Var(X)}

- Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt:

- P\_p^n (X =k) ={n \choose k} \*p^k \*(1 -p)^{n -k}

- Erwartungswert:  
\mu =n \*p

- Standardabweichung:  
\sigma =\sqrt{n \*p \*(1 -p)}

- Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße:  
\phi(x) =\frac{1}{\sigma \*\sqrt{2 \pi}} \*e^{-1/2 \*(\frac{x -\mu}{\sigma})^2}

## Sigma-Regeln

Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

- P(\mu -\sigma \le X \le \mu +\sigma) \approx 68,3 %

- P(\mu -1,64 \sigma \le X \le \mu +1,64 \sigma) \approx 90,0 %

- P(\mu -1,96 \sigma \le X \le \mu +1,96 \sigma) \approx 95,0 %

- P(\mu -2 \sigma \le X \le \mu +2 \sigma) \approx 95,4 %

- P(\mu -2,58 \sigma \le X \le \mu +2,58 \sigma) \approx 99,0 %

- P(\mu -3 \sigma \le X \le \mu +3 \sigma) \approx 99,7 %

## Prognoseintervall und Konfidenzintervall

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

- Prognoseintervall:  
[p -c \*\sqrt{\frac{p \*(1 -p)}{n}}; p +c \*\sqrt{\frac{p \*(1 -p)}{n}}]

- Die Gleichung  
|h -p| =c \*\sqrt{\frac{p \*(1 -p)}{n}}  
liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

## Signifikanztest

Wird die Nullhypothese irrtümlich abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler erster Art. Das Signifikanzniveau ist der Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art nicht überschreiten soll.

Wird die Nullhypothese irrtümlich nicht abgelehnt, so bezeichnet man dies als Fehler zweiter Art.